Řady – pokračování (cvičení 21.11. a 23.11)

1) Ukažte, že platí:

$\sum_1^\infty a_n^2$ a $\sum_1^\infty b_n^2$ konvergují $\Rightarrow$ $\sum_1^\infty a_n \cdot b_n$ konverguje absolutně

2) Označme $R_k = \sum_{n=k+1}^\infty a_n$; ukažte, že platí:

$\sum_1^\infty a_n$ konverguje $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} R_k = 0$.

3) Mějme $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n$, kde $a_n \geq a_{n+1}$ pro $\forall n$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (tj. řada je konvergentní). Odhadněte $|R_k|$

($|R_k| \leq |a_{k+1}|$)

4) Odhadněte $|R_k|$ řady $\sum_0^\infty \frac{a^n}{n!}$.

5) Vyšetřete konvergenci řady v závislosti na parametru x:

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad ; \quad \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad ;$$

$$\sum_1^\infty n! \left(\frac{x}{n}\right)^n \quad ; \quad \sum_{n=1}^\infty n^4 x^n \quad ; \quad \sum n^x \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

6) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_2^\infty \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha} \quad (\text{v závislosti na } \alpha)$$

7) Vyšetřete konvergenci řad (v závislosti na parametru x)

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}(1+x)^n \; ; \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2 \cdot 3^n} \; ;$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n \cdot \sqrt{n}} \; ; \qquad \sum_{1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{n}\right)x\right]^n .$$

8) a) Ukažte, že alternující řada

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\dots$$

diverguje (i když $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$)

b) Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

9) Vyšetřete konvergenci řad

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{3}-1\right)$ (Leibniz)

b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\sqrt{n+1}}$ (Dirichlet).